

MAGNETSKO POLJE RAVNOG VODIČA I ZAVOJNICE

MAGNETOSTATIKA

Temeljne jednađžbe magnetostatike

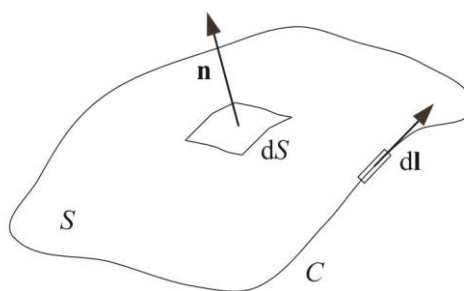
Diferencijalne jednađžbe magnetostatike glase:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Prva od jednađžbi u (1) koja povezuje magnetsko polje $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ i gustoću struje $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ naziva se Ampèreov zakon. Konstanta μ_0 je permeabilnost vakuumu i iznosi

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}\tag{2}$$

Druga jednađžba u (1) je matematička formulacija činjenice da magnetski naboj ne postoji.



Slika 1 Ploha i krivulja integracije za jednađžbe (3).

Integralni oblik jednađžbi (1) je:

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 0\end{aligned}\tag{3}$$

gdje je I struja. U prvoj jednadžbi u (3) zatvorena krivulja C omeđuje plohu S (Slika 1), a u drugoj je ploha S zatvorena. Struja I je ukupna struja kroz C . Predznaci pojedinih struja čija je suma jednaka struji I , određuju se prema pravilu desne ruke i pozitivnoj orijentaciji krivulje C .

Magnetski vektorski potencijal

Zbog jednadžbe $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ možemo uvesti magnetski vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ na sljedeći način:

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

Ovako definiran vektorski potencijal određen je do na gradijent proizvoljne funkcije. Ako izraz (4) uvrstimo u Ampèreov zakon, tada, uz Coulombov izbor $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, dobivamo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5)$$

Partikularno rješenje jednadžbe (5) u kojem su rubne plohe jako daleko od lokalizirane gustoće struje $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ smještene u području V glasi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (6)$$

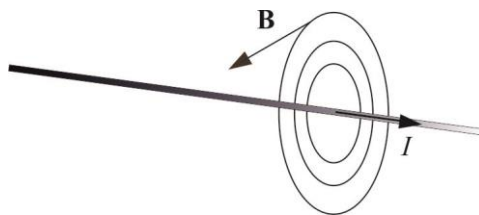
MAGNETSKO POLJE VODIČA I ZAVOJNICE

Magnetsko polje veoma dugog, ravnog i tankog vodiča

Magnetsko polje ravnog, beskonačnog i tankog vodiča kojim protječe struja I možemo odrediti pomoću integralnog oblika Ampèreovog zakona. Za iznos magnetskog polja dobijemo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \quad (7)$$

gdje je ρ udaljenost od vodiča. Silnice magnetskog polja ravnog vodiča su kružnice sa središtem na vodiču, a leže u ravninama okomitim na vodič. Smjer magnetskog polja tangencijalan je na kružnice (Slika 2).

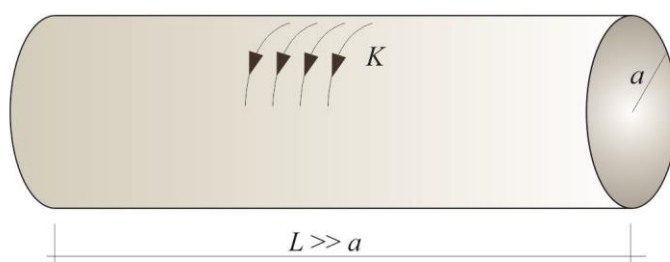


Slika 2 Magnetsko polje veoma dugog i tankog vodiča.

Stvarni vodiči su konačne duljine L pa izraz (7) približno vrijedi samo za udaljenosti $\rho \ll L$ i daleko od krajeva vodiča.

Magnetsko polje veoma dugog solenoida

Zavojnica namotana tako da su susjedni, izolirani namoti žice primaknuti i dodiruju se, naziva se solenoidom. Ako na solenoidu postoji samo jedan sloj žice zovemo ga jednoslojnim. Uobičajeno na solenoidu postoji više slojeva namotane žice čime se dobiva jače magnetsko polje. Razmatrat ćemo samo solenoide cilindričkog oblika s kružnim presjekom. Uobičajeno je polumjer žice mnogo manji od polumjera solenoida pa solenoid možemo promatrati kao da je cilindar kojim protječe plošna struja $K = nI$, gdje je n broj zavoja N po jediničnoj duljini zavojice L , $n \equiv N/L$, a I je struja koja protječe žicom (Slika 3). Savršeni solenoid ima beskonačnu duljinu i matematička je tvorevina pogodna za konceptualna razmatranja i jednostavne izračune.



Slika 3 Cilindar čijom površinom protječe plošna struja K .

Neka je polumjer solenoida jednak a . Koordinatni sustav postavimo tako da se os z podudara s geometrijskom osi zavojnice. Pomoću Ampèreovog zakona može se pokazati da je magnetsko polje savršenog solenoida jednako

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{e}_z, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases} \quad (8)$$

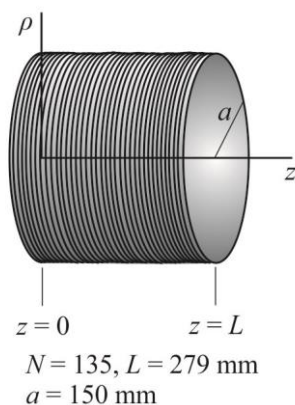
Savršeni solenoid je dobar model za solenoid konačne duljine za kojeg su $\rho, a \ll L$, a polje mjerimo daleko od rubova solenoida.

Magnetsko polje solenoida konačne duljine

Magnetski vektorski potencijal kružne petlje kojom protječe struja I je prema (6) jednak

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9)$$

gdje je krivulja C kružnica. Postavimo koordinatni sustav kao na slici 4. Numeričke vrijednosti veličina na slici odgovaraju stvarnoj zavojnici na kojoj se vrše mjerenja u praktikumu.



Slika 4 Solenoid konačne duljine.

Za izračun magnetskog polja konačnog solenoida koristimo jednadžbu (9) te primijenimo načelo superpozicije. Zbog azimutalne simetrije problema, pogodno je izabrati cilindričke koordinate (ρ, ϕ, z) . Ukupni vektorski potencijal solenoida s N namota, konačne duljine L i polumjera presjeka a kroz kojeg protječe struja I glasi

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 a N I}{2L} \int_0^\infty k^{-1} J_1(k\rho) J_1(ka) f(k; z) dk \quad (10)$$

gdje je

$$f(k; z) = \begin{cases} e^{-k(z-L)} - e^{-kz}, & z \geq L \\ 2 - e^{-k(L-z)} - e^{-kz}, & 0 \leq z < L \end{cases} \quad (11)$$

Funkcija $J_1(\eta)$ u (10) je Besselova funkcija prvog reda. Raspišemo li rotaciju vektorskog potencijala iz (4) u cilindričkim koordinatama, dobivamo

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \mathbf{e}_z \quad (12)$$

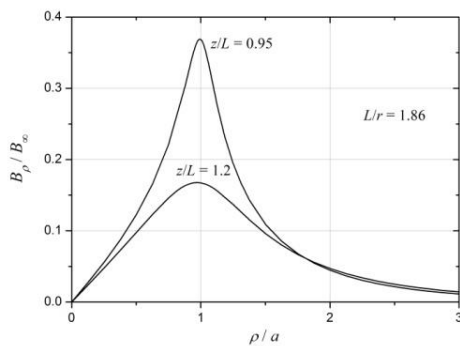
Radijalna komponenta magnetskog polja konačnog solenoida je

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{\mu_0 a N I}{2L} \int_0^\infty \left(e^{-k|z-L|} - e^{-kz} \right) J_1(k\rho) J_1(ka) dk \quad (13)$$

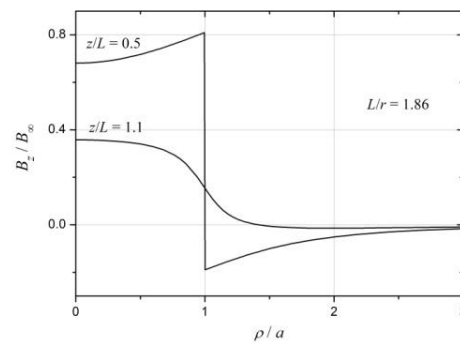
Aksijalna komponenta magnetskog polja konačnog solenoida je

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) = \frac{\mu_0 a N I}{2L} \int_0^\infty J_0(k\rho) J_1(ka) f(k; z) dk \quad (14)$$

gdje je $J_0(\eta)$ Besselova funkcija nultog reda. Na slici 5 i slici 6 prikazani su grafovi radijalne i aksijalne komponente magnetskog polja konačnog solenoida u odgovarajućim jedinicama.



Slika 5 Dva primjera radijalne komponentne magnetskog polja konačnog solenoida.



Slika 6 Dva primjera aksijalne komponentne magnetskog polja konačnog solenoida.

Magnetsko polje zemlje

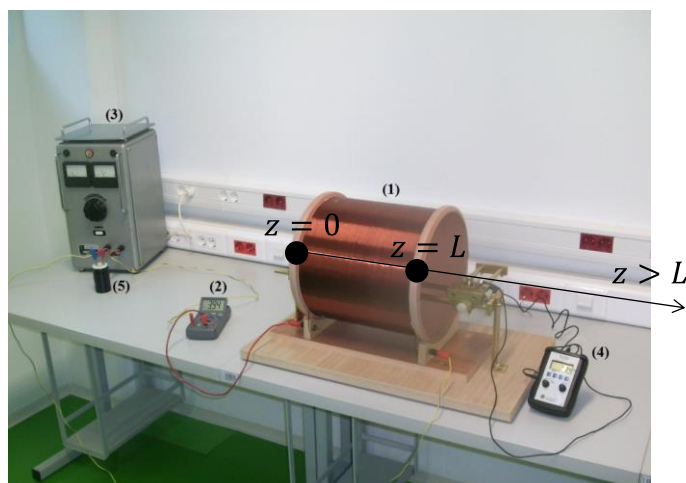
Magnetsko polje Zemlje ima složenu strukturu, a vjeruje se da je posljedica gibanja naboja zbog konvekcijskih struja topline koje protječu dijelovima unutrašnjosti Zemlje i struja naboja sa Sunca. Za jednostavne proračune možemo smatrati da magnetsko polje Zemlje ima dipolni oblik. U Rijeci, vodoravna komponenta magnetskog polja usmjerena je približno prema sjeveru i iznosi 0,22 G. Okomita komponenta usmjerena je prema površini Zemlje i približno iznosi 0,42 G.

ZADACI:

1. Izmjeri magnetsko polje ravnog vodiča u ovisnosti o udaljenosti od vodiča za neku vrijednost struje kroz zavojnicu. Rezultate usporedi s očekivanim teorijskim vrijednostima te metodom najmanjih kvadrata odredi karakter ovisnosti.
2. Odredi ovisnost gustoće magnetskog toka o struji kroz vodič te usporedi s teorijskim vrijednostima.
3. Izmjeri magnetsko polje zavojnice duž osi i duž polumjera zavojnice za neku vrijednost struje kroz zavojnicu. Usporedi dobivene grafove sa priloženim teorijskim krivuljama i diskutiraj dobivene rezultate.
4. Odredi ovisnost gustoće magnetskog toka o struji kroz zavojnicu te usporedi s teorijskim vrijednostima.

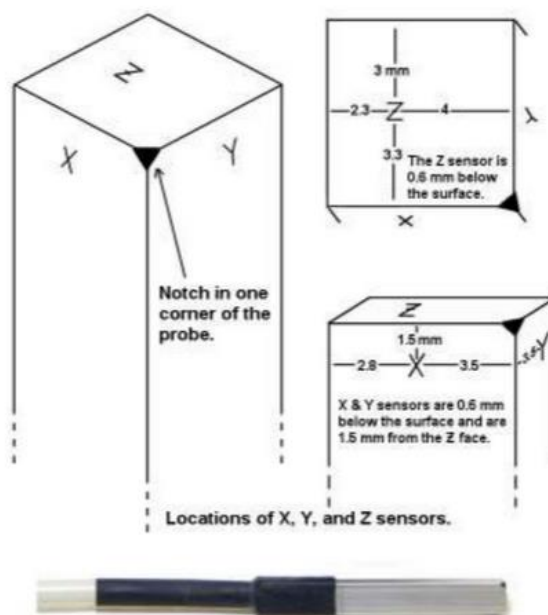
POSTAVLJANJE I POSTUPAK EKSPERIMENTA

Eksperimentalni sklop (slika 7) se sastoji od ravnog vodiča ili zavojnice - jednoslojnog solenoida, koji su preko ampermetra spojeni na izvor istosmjernog napajanja s mogućnošću njegove kontinuirane promjene i gaussmetra kojim mjerimo gustoću magnetskog toka ravnog vodiča, odnosno zavojnice. Kondenzator paralelno vezan s izvorom napajanja služi za izgladivanje istosmjernog napona.



Slika 7 Eksperimentalni sklop za mjerenje magnetskog polja zavojnice koji se sastoji od (1) zavojnice - jednoslojnog solenoida, (2) ampermetra, (3) izvora istosmjernog napajanja, (4) teslametra i (5) kondenzatora.

Gaussmetar (slika 8) se koristi na način da se nakon uključivanja, lijevom dugmetom odabere opcija *Measure*. Pritiskanjem tipke *View* pomiče se trokutić na vrhu zaslona. On se postavlja u jedan od tri moguća položaja (*X Axis*, *Y Axis* ili *Z Axis*), u ovisnosti o tome koji se smjer magnetskog polja želi mjeriti. Na desnoj strani se nalazi slika sonde te su označeni položaji senzora. Ako umetnemo sondu, tako da je njena



Slika 8 Teslametar

Ako umetnemo sondu kao na slici 9, tada će *Z Axis* mjeriti aksijalnu komponentu magnetskog polja solenoida, a *X Axis* i *Y Axis* radijalnu komponentu.



Slika 9 Izvođenje mjerenja

Magnetsko polje ravnog vodiča

Ovisnost gustoće magnetskog toka o udaljenosti

Gustoća magnetskog toka B_ρ izražena mjernom jedinicom G, mjeri se pomoću gaussmetra s uključenom opcijom *X Axis*, u 10 točaka različito udaljenih od vodiča u rasponu od 0,5 cm do 10 cm. Pritom se koristi plastično ravnalo s mjernom ljestvicom u milimetrima koje se postavlja okomito na vodič. Mjerenja izvesti pri konstantnoj, proizvoljnoj vrijednosti struje u rasponu od 2 A do 10 A. (Neka vrijednost struje ima pozitivnu vrijednost!)

Izmjerene i odabrane vrijednosti odgovarajućih fizičkih veličina zapisuju se u priloženu tablicu.

Ovisnost gustoće magnetskog toka o struji

Drugi dio zadatka odnosi se na određivanje ovisnost gustoće magnetskog toka o struji kroz vodič.

Gaussmetar s uključenom opcijom *X Axis* postavi se u proizvoljan položaj od vodiča u rasponu od 0 do 5 cm. U toj točki mjeri se gustoća magnetskog toka B_ρ u gausima, za vrijednosti struje 2 A, 4 A, 6 A, 8 A i 10 A.

Izmjerene i odabrane vrijednosti odgovarajućih fizičkih veličina zapisuju se u priloženu tablicu.

$$B = f(\rho)$$

Ravni vodič		
I / A	ρ / cm	B_ρ / G

$$B = f(I)$$

Ravni vodič		
ρ / cm	I / A	B_ρ / G

Cilindrični koordinatni sustav zavojnice osmišljen je na sljedeći način; Nosač od mjeđi postavljen kroz zavojnicu, služi za pomicanje gaussmetra duž osi zavojnice koja predstavlja os z te duž polumjera zavojnice koji predstavlja ρ koordinatu u cilindričnom koordinatnom sustavu. Ishodišna točka je na početku zavojnice (vidi sliku 7 i sliku 9). Za određivanje z i ρ koordinata koristi se plastično ravnalo s mjernom ljestvicom u milimetrima koje se postavlja uz nosač gaussmetra.

Gustoća magnetskog toka B_z izražena mjernom jedinicom G, mjeri se pomoću gaussmetra s uključenom opcijom *Z Axis*, u 10 točaka duž osi z . Pritom se proizvoljno odabiru točke od početka (od točke $z = 0$) do kraja zavojnice (do točke $z = L$) pri konstantnoj struji od 8 A. Ponoviti mjerenje još jednom za struju od 10 A. Sonda gaussmetra je postavljena u središte solenoida ($\rho = 0$)

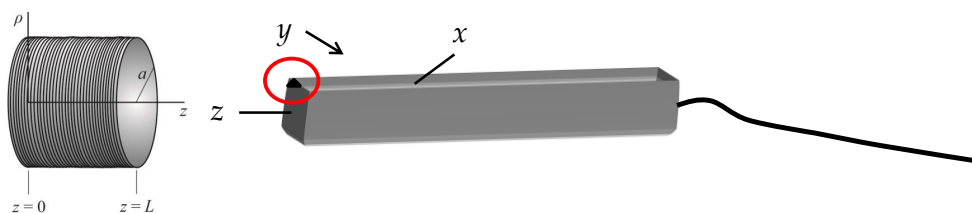
[illegible]

Gustoća magnetskog toka duž polumjera zavojnice

Gustoća magnetskog toka B_ρ u gausima mjeri se pomoću gaussmetra s uključenom opcijom *Y Axis* ili *X Axis* (ovisno kako je postavljena sonda – vidi: opaska), u 10 točaka duž polumjera ρ zavojnice (npr. od središta prema desno). Tijekom mjerenja B_ρ , gaussmetar se postavlja najprije u točku koja odgovara $z = 14$ cm (približno u središte zavojnice) te se izvede mjerenje ako strujnim krugom prolazi konstantna struja od 10 A. Nakon toga se sonda postavi na udaljenost $z = 35$ cm, $z > L$ te se ponovno izvede mjerenje za struju od 10 A. Podatke upisati u priloženu tablicu.

Solenoid, I=10 A			Solenoid, I=10 A		
z / cm	ρ / cm	B_ρ / G	z / cm	ρ / cm	B_ρ / G
14			35		

Opaska: Ako bi sondu postavili u solenoid kao što je prikazano na donjoj slici (vodi računa gdje je racnjeni vrh) i ako bi je pomicali udesno, da bi dobili radijalnu komponentu magnetskog polja moramo gledati *Y Axis*. Ako bi je pomicali gore onda bi morali gledati *X Axis*, da odredimo radijalnu komponentu magnetskog polja.



Slika 10

Ovisnost gustoće magnetskog toka o struji

Gaussmetar s uključenom opcijom Z Axis postavi se u položaj s koordinatama $\rho = 0$ i $z = 14$ cm unutar zavojnice. U toj točki mjeri se gustoća magnetskog toka B_I u gausima, za vrijednosti struje 2 A, 4 A, 6 A, 8 A i 10 A.

Izmjerene i odabrane vrijednosti odgovarajućih fizičkih veličina zapisuju se u priloženu tablicu.

Solenoid			
ρ / cm	z / cm	I / A	B_I / G
0	14		

Svako mjerenje potrebno je grafički prikazati.